

**O  
anglo  
resolve**

## **a prova de Conhecimentos Específicos da UNESP**

É trabalho pioneiro.

Prestação de serviços com tradição de confiabilidade.

Construtivo, procura colaborar com as Bancas Examinadoras em sua tarefa de não cometer injustiças.

Didático, mais do que um simples gabarito, auxilia o estudante no processo de aprendizagem, graças a seu formato: reprodução de cada questão, seguida da resolução elaborada pelos professores do Anglo.

No final, um comentário sobre as disciplinas.

A Universidade Estadual Paulista — Unesp — tem unidades instaladas em várias cidades do estado de São Paulo: Araçatuba, Araraquara, Assis, Bauru, Botucatu, Franca, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Jaboticabal, Marília, Presidente Prudente, Rio Claro, São José dos Campos, São José do Rio Preto, São Paulo e São Vicente.

Seu vestibular é realizado pela Fundação Vunesp, em uma única fase.

São 3 provas (cada uma valendo 100 pontos), a serem realizadas em até 4 horas, em dias consecutivos, assim constituídas:

**1º dia: Prova de Conhecimentos Gerais** (peso 1), comum para todas as áreas, com 84 testes de múltipla escolha divididos igualmente entre Matemática, Física, Química, Biologia, Geografia, História e Língua Estrangeira (Inglês ou Francês, conforme opção).

**2º dia: Prova de Conhecimentos Específicos** (peso 2), com 25 questões discursivas. As disciplinas que compõem essa prova variam conforme a área pela qual o candidato optou:

**Área de Ciências Biológicas** — Biologia (10 questões), Química (6 questões), Física (5 questões) e Matemática (4 questões).

**Área de Ciências Exatas** — Matemática (10 questões), Física (9 questões) e Química (6 questões).

**Área de Humanidades** — História (10 questões), Geografia (9 questões) e Língua Portuguesa (6 questões).

**3º dia: Prova de Língua Portuguesa** (peso 2), comum para todas as áreas, constando de 10 questões discursivas e uma redação dissertativa.

Para os cursos de Arquitetura e Urbanismo, Artes Cênicas, Artes Visuais, Desenho Industrial, Educação Artística, Educação Física, Educação Musical e Música, há prova de Habilidade Específica, cujo peso varia conforme a opção.

Para cada prova é atribuída nota que varia de 0 a 100 pontos.

A nota final é a média ponderada das provas.

*Observação:* A Unesp utiliza a nota dos testes do ENEM, aplicando-a segundo

esta fórmula:  $\frac{4 \times CG + 1E}{5}$ , em que CG é a nota da prova de Conhecimentos Gerais e E é a nota do ENEM. O resultado só será levado em conta se favorecer o candidato.

# ÁREA DE CIÊNCIAS EXATAS

---

# MATEMÁTICA

## Questão 1

Considere um triângulo equilátero  $T_1$  de área  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo equilátero  $T_2$ , que tem os pontos médios dos lados de  $T_1$  como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo equilátero  $T_3$ , e assim por diante, indefinidamente. Determine:

- as medidas do lado e da altura do triângulo  $T_1$ , em centímetros;
- as áreas dos triângulos  $T_2$  e  $T_7$ , em  $\text{cm}^2$ .

### Resolução

a) Sejam:

$l_1$ ... medida, em cm, do lado do triângulo  $T_1$ ;

$h_1$ ... medida, em cm, da altura do triângulo  $T_1$ .

Do enunciado, temos:  $\frac{l_1^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \therefore l_1 = 8$

e

$$h_1 = \frac{l_1 \sqrt{3}}{2} \therefore h_1 = \frac{8\sqrt{3}}{2} \therefore h_1 = 4\sqrt{3}$$

**Resposta:** O lado mede 8cm e a altura mede  $4\sqrt{3}$  cm.

b) Do enunciado, podemos concluir que as áreas dos triângulos equiláteros formam a Progressão Geométrica

$$\left( 16\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{\sqrt{3}}{64}, \frac{\sqrt{3}}{256}, \dots \right), \text{ de razão } \frac{1}{4}.$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_5 \quad T_6 \quad T_7$

Logo, as áreas dos triângulos  $T_2$  e  $T_7$ , em  $\text{cm}^2$ , são respectivamente iguais a  $4\sqrt{3}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{256}$ .

**Resposta:** As áreas dos triângulos  $T_2$  e  $T_7$ , em  $\text{cm}^2$ , são respectivamente iguais a  $4\sqrt{3}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{256}$ .

## Questão 2

Considere os números complexos  $z = 2 - i$  e  $w = -3 - i$ , sendo  $i$  a unidade imaginária.

a) Determine  $z \cdot w$  e  $|w - z|$ .

b) Represente  $z$  e  $w$  no plano complexo (Argand-Gauss) e determine  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ , de modo que os números complexos  $z$ ,  $w$  e  $t = bi$  sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

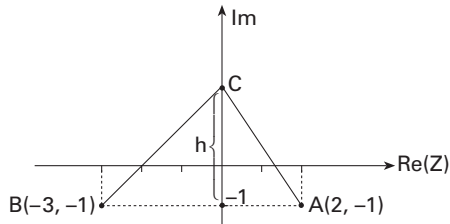
### Resolução

$$\begin{aligned} \text{a) } z \cdot w &= (2 - i)(-3 - i) \\ &= -6 - 2i + 3i + i^2 \\ &= -7 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |w - z| &= |-3 - i - (2 - i)| \\
 &= |-3 - i - 2 + i| \\
 &= |-5| \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

**Resposta:**  $z \cdot w = -7 + i$  e  $|w - z| = 5$

b)



Se  $h$  a altura do triângulo ABC, temos:

$$\frac{1}{2}h \cdot AB = 20$$

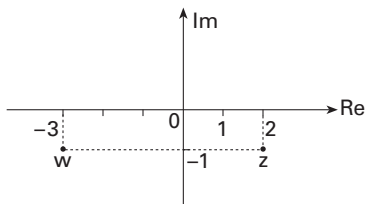
$$\frac{1}{2}h \cdot 5 = 20$$

$$h = 8$$

Como  $C$  é o afixo de  $t = bi$ , com  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ , temos:

$$t = -i + 8i \quad \therefore \quad t = 7i$$

**Resposta:**



$$b = 7.$$

### Questão 3

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ .

O determinante de  $A$  é um polinômio  $p(x)$ .

- Verifique se 2 é uma raiz de  $p(x)$ .
- Determine todas as raízes de  $p(x)$ .

### Resolução

a) Do enunciado, temos:

$$p(x) = \det A$$

$$p(x) = x^3 + \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot 2 - 2x^2$$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Substituindo-se  $x$  por 2, vem:

$$p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 \quad \therefore \quad p(2) = 0$$

Portanto, 2 é uma raiz de  $p(x)$ .

**Resposta:** 2 é uma raiz de  $p(x)$

b) Do item (a):

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$p(x) = x^2(x - 2) - (x - 2)$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 - 1)$$

$$p(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)$$

As raízes de  $p(x)$  serão dadas por:

$$(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore \quad x - 2 = 0, \text{ ou } x + 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

Portanto, as raízes de  $p(x)$  são 2, 1 e -1.

**Resposta:** 2, 1 e -1

#### Questão 4

Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

#### Resolução

a) A quantidade de números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é  $6!$ , ou seja, 720.

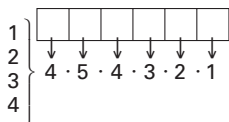
A quantidade de números que se iniciam com o algarismo 1 é dada por:



Assim, existem 120 números.

**Resposta:** 720 e 120, respectivamente.

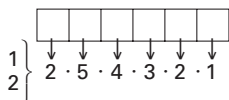
b) Em ordem crescente, a quantidade de números antes do número 512346 é dada por:



Assim, temos 480 números antes de 512346.

Portanto, em ordem crescente, o número 512346 ocupa a 481ª posição.

Agora, começando pelo algarismo 1 ou pelo algarismo 2, a quantidade de números é dada por:



Assim, temos 240 números.

Logo, o 241º número escrito em ordem crescente é 312456 e, portanto, o 242º número é 312465.

**Resposta:** 481ª e 312465.

### Questão 5

Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente  $b$  da equação  $x^2 + bx + 1 = 0$ . Determine

a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.

b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

### Resolução

a) Para que a equação  $x^2 + bx + 1 = 0$ , com  $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , tenha raízes reais, o discriminante ( $\Delta$ ) dessa equação deve ser não-negativo.

Como  $\Delta = b^2 - 4$ , então os valores possíveis de  $b$  são 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, existem 5 possibilidades para  $b$ .

Portanto, a probabilidade de essa equação ter raízes reais é  $\frac{5}{6}$ .

**Resposta:**  $\frac{5}{6}$ .

b) Sabendo que ocorreu um número ímpar (ou seja, 1, 3 ou 5), temos do item (a) que a probabilidade pedida é  $\frac{2}{3}$ .

**Resposta:**  $\frac{2}{3}$ .

### Questão 6

A reta  $r$  de equação  $y = \frac{x}{2}$  intercepta a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{5}$  em dois pontos  $P$  e  $Q$ , sendo que as coordenadas de  $P$  são ambas positivas. Determine:

a) a equação da circunferência e os pontos  $P$  e  $Q$ ;

b) a equação da reta  $s$ , perpendicular a  $r$ , passando por  $P$ .

### Resolução

a) Uma equação da circunferência  $\lambda$  de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{5}$  é  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{5})^2$ , ou seja,  $x^2 + y^2 = 5$ .

$$\text{Temos: } \begin{cases} (r) y = \frac{x}{2} & \text{(I)} \\ (\lambda) x^2 + y^2 = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II), temos:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5$$

$$x^2 = 4 \begin{cases} \nearrow x = 2 & \therefore y = 1 \\ \text{ou} \\ \searrow x = -2 & \therefore y = -1 \end{cases}$$

Logo,  $P = (2, 1)$  e  $Q = (-2, -1)$ .

**Resposta:**  $x^2 + y^2 = 5$ ,  $P(2, 1)$  e  $Q(-2, -1)$ .

b) Como o coeficiente angular da reta  $r$  é igual a  $\frac{1}{2}$ ,  $s$  tem coeficiente angular  $-2$ .

Assim, uma equação de  $s$  é  $y - 1 = -2(x - 2)$ , ou seja,  $y = -2x + 5$ .

**Resposta:**  $y = -2x + 5$ .

### Questão 7

Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro  $n$  (tamanho do calçado) em função do comprimento  $c$ , do pé, em cm.

Pela fórmula, tem-se  $n = [x]$ , onde  $x = \frac{5}{4}c + 7$  e  $[x]$  indica o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo, se  $c = 9$  cm, então  $x = 18,25$  e  $n = [18,25] = 19$ . Com base nessa fórmula,

- determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.
- se o comprimento do pé de uma pessoa é  $c = 24$  cm, então ela calça 37. Se  $c > 24$  cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

### Resolução

a) De  $c = 22$ , temos:  $x = \frac{5}{4} \cdot 22 + 7 \quad \therefore x = 34,5$   
 $[x] = 35 \quad \therefore n = 35$

**Resposta:** 35

b) De  $n = 38$ , temos:  $x \leq 38$

$$\frac{5}{4}c + 7 \leq 38$$

$$\frac{5}{4}c \leq 31$$

$$c \leq 24,8$$

Portanto, o valor máximo de  $c$  é 24,8.

**Resposta:** 24,8.

### Questão 8

Considere as funções  $f(x) = \log_3(9x^2)$  e  $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$ , definidas para todo  $x > 0$ .

- Resolva as duas equações:  $f(x) = 1$  e  $g(x) = -3$ .
- Mostre que  $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$ .

### Resolução

a) De  $\log_3(9x^2) = 1$ , temos:

$$9x^2 = 3^1$$

$$x^2 = \frac{3}{9}$$

Com  $x > 0$ , temos  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

De  $\log_3 \frac{1}{x} = -3$ , temos:

$$\frac{1}{x} = 3^{-3}$$

$$x^{-1} = 3^{-3} \quad \therefore x = 3^3 = 27$$

**Resposta:**  $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$  e  $\{27\}$ , nessa ordem.

$$b) 1 + f(x) + g(x) =$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 + \log_3 9 + \log_3 x^2 + \log_3 x^{-1} \\ &= 1 + 2 + 2\log_3 x - \log_3 x \\ &= 3 + \log_3 x \end{aligned}$$

(c.q.d.)

### Questão 9

A temperatura, em graus celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, das 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), 0 \leq t \leq 24,$$

com  $t$  em horas. Determine:

- a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações  $\sqrt{2} = 1,4$  e  $\sqrt{3} = 1,7$ );  
b) em quais horários do dia a temperatura atingiu  $0^{\circ}\text{C}$ .

### Resolução

a) Do enunciado:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), 0 \leq t \leq 24$$

Substituindo  $t$  por 2 e 9 temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} f(2) &= \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 0,35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(9) &= \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 9\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -0,7 \end{aligned}$$

**Resposta:** às 2 horas:  $0,35^{\circ}\text{C}$ ; às 9 horas:  $-0,7^{\circ}\text{C}$ .

b) Seja  $T = \frac{\pi}{12}t$ , com  $0 \leq t \leq 24$ .

$$\text{Então: } 0 \cdot \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{12}t \leq 24 \cdot \frac{\pi}{12}, \text{ ou seja, } 0 \leq T \leq 2\pi.$$

Os horários do dia nos quais a temperatura atingiu  $0^{\circ}\text{C}$  são tais que  $f(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq 24$ .

Assim:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0, 0 \leq t \leq 24$$

Fazendo-se  $T = \frac{\pi}{12}t$  vem:

$$\cos T - \cos 2T = 0, 0 \leq T \leq 2\pi$$

$$\therefore \cos T - (2\cos^2 T - 1) = 0$$

$$\therefore 2\cos^2 T - \cos T - 1 = 0$$

$$\therefore \cos T = 1 \quad \text{ou} \quad \cos T = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } T = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ ou}$$

$$T = 2\pi \quad \therefore t = 24 \text{ ou}$$

$$T = \frac{2\pi}{3} \quad \therefore t = 8 \text{ ou}$$

$$T = \frac{4\pi}{3} \quad \therefore t = 16$$

**Resposta:** 0 horas, 8 horas, 16 horas e 24 horas.

### Questão 10

Considere um cilindro circular reto de altura  $x$  cm e raio da base igual a  $y$  cm.

Usando a aproximação  $\pi = 3$ , determine  $x$  e  $y$  nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é  $243 \text{ cm}^3$  e a altura é igual ao triplo do raio;

b) a área da superfície lateral do cilindro é  $450 \text{ cm}^2$  e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

### Resolução

a) Do enunciado, temos:

$$\pi \cdot y^2 \cdot x = 243 \quad \therefore 3 \cdot y^2 \cdot x = 243 \quad (\text{I})$$

$$x = 3y \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), temos:

$$3 \cdot y^2 \cdot 3y = 243 \quad \therefore y^3 = 27 \quad \therefore y = 3$$

Substituindo-se  $y = 3$  em (II), vem:

$$x = 3 \cdot 3 \quad \therefore x = 9$$

**Resposta:**  $x = 9$  e  $y = 3$

b) Do enunciado, temos:

$$2 \cdot \pi \cdot y \cdot x = 450 \quad \therefore 2 \cdot 3 \cdot y \cdot x = 450 \quad (\text{I})$$

$$x = y + 10 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), temos:

$$2 \cdot 3 \cdot y \cdot (y + 10) = 450$$

$$y^2 + 10y - 75 = 0 \begin{cases} y = 5 \\ \text{ou} \\ y = -15 \quad (\text{não convém}) \end{cases}$$

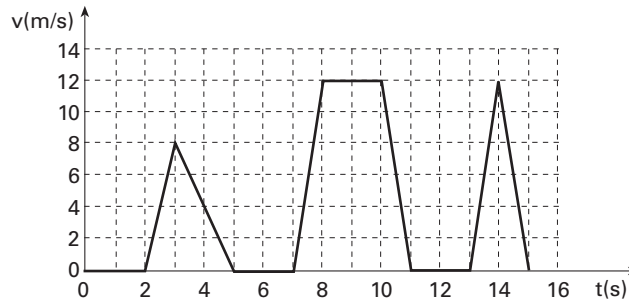
Substituindo-se  $y = 5$  em (II), vem:

$$x = 5 + 10 \quad \therefore x = 15$$

**Resposta:**  $x = 15$  e  $y = 5$

## Questão 11

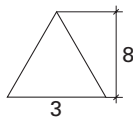
O gráfico na figura descreve o movimento de um caminhão de coleta de lixo em uma rua reta e plana, durante 15s de trabalho.



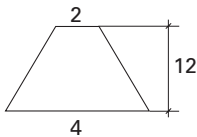
- Calcule a distância total percorrida neste intervalo de tempo.
- Calcule a velocidade média do veículo.

## Resolução

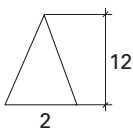
a) A distância total percorrida corresponde à soma das áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  obtidas do gráfico  $v \times t$  dado.



$$A_1 = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$



$$A_2 = \frac{(4 + 2)}{2} \cdot 12 = 36$$



$$A_3 = \frac{2 \cdot 12}{2} = 12$$

$$d = 12 + 36 + 12 \quad \therefore \quad d = 60 \text{ m}$$

b) O movimento ocorre em um único sentido, portanto  $d = \Delta s$ .

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v_m = \frac{60}{15} \quad \therefore \quad v_m = 4 \text{ m/s}$$

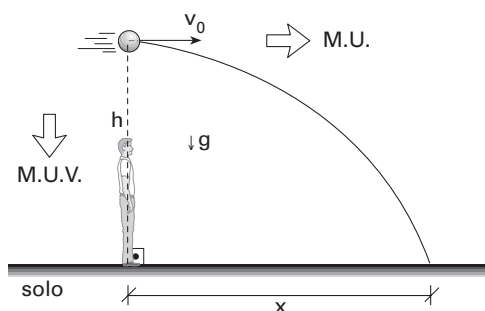
## Questão 12

Um balão se desloca horizontalmente, a 80,0m do solo, com velocidade constante de 6,0m/s. Quando passa exatamente sobre um jovem parado no solo, um saquinho de areia é abandonado do balão. Desprezando qualquer atrito do saquinho com o ar e considerando  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , calcule

- o tempo gasto pelo saquinho para atingir o solo, considerado plano.
- a distância entre o jovem e o ponto onde o saquinho atinge o solo.

## Resolução

Podemos estudar o movimento do saquinho de areia como um lançamento horizontal.



a) Analisando-se o M.U.V. na vertical, vem que:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{queda}}^2$$

$$t_{\text{queda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

$$t_{\text{queda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (80)}{10}} \Rightarrow t_{\text{queda}} = 4 \text{ s}$$

b) Do M.U. na horizontal:

$$x_{\text{alcance}} = v_0 \cdot t_{\text{queda}}$$

$$x_{\text{alcance}} = 6 \cdot (4) \Rightarrow x_{\text{alcance}} = 24 \text{ m}$$

## Questão 13

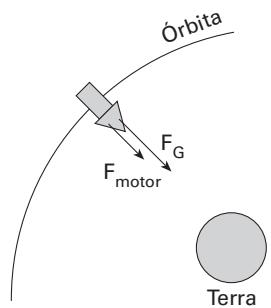
Uma espaçonave de massa  $m$  gira em torno da Terra com velocidade constante, em uma órbita circular de raio  $R$ . A força centrípeta sobre a nave é  $1,5GmM/R^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  a massa da Terra.

a) Desenhe a trajetória dessa nave. Em um ponto de sua trajetória, desenhe e identifique os vetores velocidade  $\vec{v}$  e aceleração centrípeta  $\vec{a}$  da nave.

b) Determine, em função de  $M$ ,  $G$  e  $R$ , os módulos da aceleração centrípeta e da velocidade da nave.

## Resolução

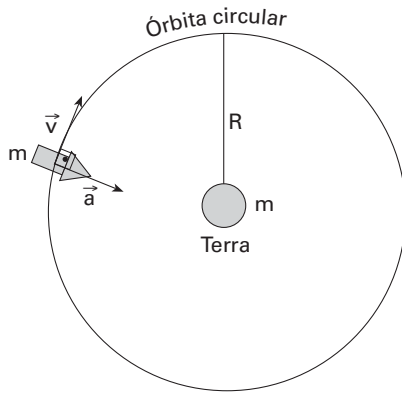
A espaçonave em questão deve estar numa órbita "forçada" tal que:



$$R_c = F_G + F_{\text{motor}}$$

$$R_c = 1,5G \frac{Mm}{R^2}$$

a) Num instante qualquer:



b) A resultante centrípeta é:

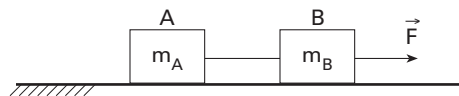
$$|\vec{R}_c| = m|\vec{a}|$$

Logo:  $a = \frac{1,5 GM}{R^2}$ , onde  $a = \frac{v^2}{R}$

Assim:  $v = \sqrt{\frac{1,5 GM}{R}}$

#### Questão 14

A figura ilustra um bloco A, de massa  $m_A = 2,0\text{kg}$ , atado a um bloco B, de massa  $m_B = 1,0\text{kg}$ , por um fio inextensível de massa desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a mesa é  $\mu_c$ . Uma força  $F = 18,0\text{N}$  é aplicada ao bloco B, fazendo com que ambos se desloquem com velocidade constante.

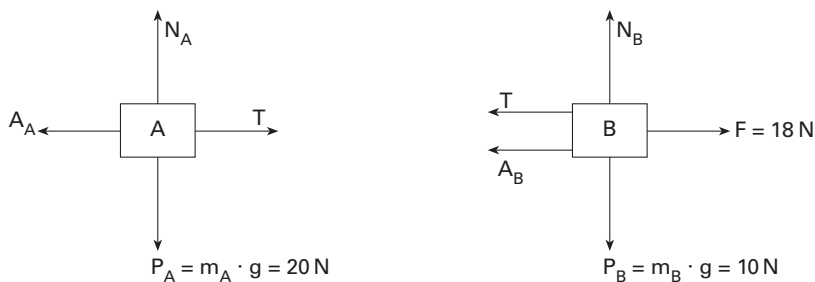


Considerando  $g = 10,0\text{m/s}^2$ , calcule

- o coeficiente de atrito  $\mu_c$ .
- a tração  $T$  no fio.

#### Resolução

a) Isolando os corpos e marcando as forças, temos:



Como os corpos descrevem MRU, as resultantes são nulas. Assim:

• corpo A:  $N_A = P_A = 20\text{ N}$

$$T = A_A \Rightarrow T = \mu_c \cdot N_A$$

$$\therefore T = \mu_c \cdot 20 \quad (I)$$

• corpo B:  $N_B = P_B = 10\text{ N}$

$$F = T + A_B \Rightarrow F = T + \mu_c \cdot N_B$$

$$\therefore 18 = T + \mu_c \cdot 10 \quad (II)$$

Substituindo-se (I) em (II):

$$18 = \mu_c \cdot 20 + \mu_c \cdot 10 \quad \therefore \mu_c = 0,6$$

b) De (I) :  $T = \mu_c \cdot 20 = 0,6 \cdot 20$

$$\therefore T = 12\text{ N}$$

### Questão 15

Uma partícula A, com massa  $m = 0,2\text{ kg}$ , colide frontalmente com uma partícula B, com massa maior que a de A, e que inicialmente se encontra em repouso. A colisão é totalmente elástica e a energia cinética final da partícula A cai para 64% de seu valor inicial. Se a velocidade inicial da partícula A for  $v_0 = 20,0\text{ m/s}$ , calcule

a) a velocidade final da partícula A.

b) a quantidade de movimento da partícula B após a colisão.

### Resolução

a) Como, após a colisão, a energia cinética de A cai para 64% de seu valor inicial:

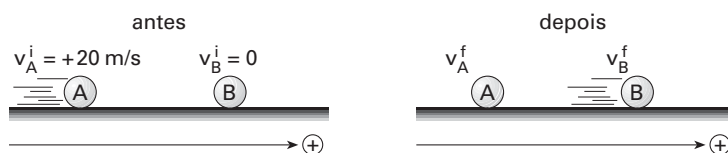
$$\varepsilon_{CA}^f = 0,64 \cdot \varepsilon_{CA}^i$$

$$\frac{m_A \cdot (v_A^f)^2}{2} = 0,64 \cdot \frac{m_A \cdot (v_A^i)^2}{2}$$

Como  $v_A^i = 20\text{ m/s}$ , temos:

$$(v_A^f)^2 = 0,64 \cdot 20^2 \quad |v_A^f| = 16\text{ m/s}$$

b) Considerando antes e após o choque, temos:



Inicialmente, vamos analisar se há ou não inversão do sentido do movimento da partícula A.

Como o choque é perfeitamente elástico, o coeficiente de restituição é igual a 1:

$$e = \frac{v_B^f - v_A^f}{v_A^i - v_B^i} = 1$$

$$1 = \frac{v_B^f - v_A^f}{v_A^i} \quad \therefore v_B^f = v_A^i + v_A^f \quad (I)$$

Como o sistema é mecanicamente isolado:

$$Q_{\text{sist}}^i = Q_{\text{sist}}^f$$

$$m_A v_A^i + m_B v_B^i = m_A v_A^f + m_B v_B^f \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$m_A v_A^i = m_A v_A^f + m_B \cdot (v_A^i + v_A^f) \quad \therefore m_B = \frac{m_A \cdot (v_A^i - v_A^f)}{v_A^i + v_A^f}$$

Como  $m_A < m_B$ :

$$m_A < \frac{m_A \cdot (v_A^i - v_A^f)}{v_A^i + v_A^f}$$

$$v_A^i + v_A^f < v_A^i - v_A^f$$

$$2 \cdot v_A^f < 0 \quad \therefore \quad v_A^f < 0$$

Portanto, a partícula A sofre inversão no sentido do movimento. Dessa forma:

$$Q_{\text{sist}}^i = Q_{\text{sist}}^f$$

$$m_A v_A^i + m_B v_B^i = m_A v_A^f + Q_B^f$$

$$0,2 \cdot 20 = 0,2 \cdot (-16) + Q_B^f$$

$$\therefore Q_B^f = 7,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

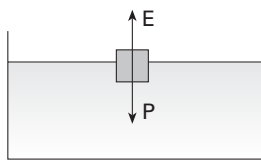
### Questão 16

Um bloco de madeira de volume  $V = 60 \text{ cm}^3$ , totalmente submerso, está atado ao fundo de um recipiente cheio de água por meio de um fio de massa desprezível. O fio é cortado e o bloco emerge na superfície com 1/4 de seu volume fora da água. Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade e  $D = 1 \text{ g/cm}^3$  a massa específica da água, calcule

- a) a massa específica do bloco.
- b) a tração no fio, antes de ser cortado.

### Resolução

- a) De acordo com o enunciado, após o corte do fio, o corpo fica com  $\frac{1}{4}$  de seu volume emerso. Marcando as forças aplicadas ao corpo nessa situação, temos:



Como o corpo está em equilíbrio:

$$\underbrace{P}_{m_c \cdot g} = \underbrace{E}_{d_A \cdot V_I \cdot g}$$

$$\underbrace{d_c \cdot V_c}_{d_c \cdot V_c} = d_A \cdot V_I$$

$$d_c \cdot \cancel{V_c} = 10^3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cancel{V_c}$$

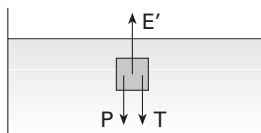
$$\therefore d_c = 0,75 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 60 \text{ cm}^3 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$V_{\text{IMERSO}} = \frac{3}{4} \cdot V$$

$$d_{\text{ÁGUA}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

- b) Antes de o fio ser cortado, o corpo encontra-se em equilíbrio, totalmente imerso ( $V_{\text{imerso}} = V_{\text{corpo}}$ ), sob a ação das forças indicadas a seguir:



$$T + P = E'$$

$$T = E' - P$$

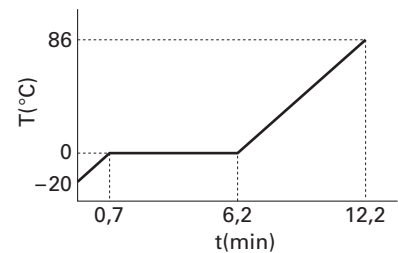
$$T = d_A \cdot V_c \cdot g - d_c \cdot V_c \cdot g$$

$$T = 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 10 - 0,75 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 10$$

$$\therefore T = 0,15 \text{ N}$$

### Questão 17

Uma quantidade de 1,5 kg de certa substância encontra-se inicialmente na fase sólida, à temperatura de  $-20^{\circ}\text{C}$ . Em um processo a pressão constante de 1,0 atm, ela é levada à fase líquida a  $86^{\circ}\text{C}$ . A potência necessária nessa transformação foi de 1,5 kJs. O gráfico na figura mostra a temperatura de cada etapa em função do tempo.



Calcule

- o calor latente de fusão  $L_f$ .
- o calor necessário para elevar a temperatura de 1,5 kg dessa substância de 0 a  $86^{\circ}\text{C}$ .

### Resolução

a) A fusão da substância ocorre no intervalo entre 0,7 min e 6,2 min; portanto:

$$P = \frac{Q_{\text{LATENTE}}}{\Delta t}$$

$$1,5 = \frac{m_s \cdot L_{\text{FUSÃO}}}{(6,2 - 0,7) \cdot 60}$$

$$1,5 = \frac{1,5 \cdot L_{\text{FUSÃO}}}{5,5 \cdot 60}$$

$$L_{\text{FUSÃO}} = 330 \text{ kJ/kg}$$

b) A elevação da temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$  a  $86^{\circ}\text{C}$  ocorre no intervalo entre 6,2 min e 12,2 min; logo:

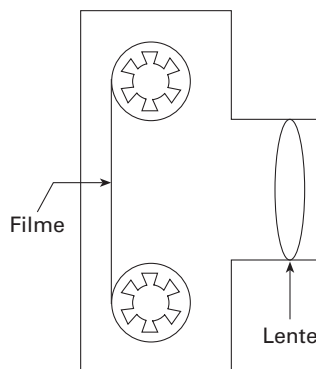
$$P = \frac{Q_s}{\Delta t}$$

$$1,5 = \frac{Q_s}{(12,2 - 6,2) \cdot 60}$$

$$Q_s = 540 \text{ kJ}$$

### Questão 18

Uma câmara fotográfica rudimentar utiliza uma lente convergente de distância focal  $f = 50 \text{ mm}$  para focalizar e projetar a imagem de um objeto sobre o filme. A distância da lente ao filme é  $p' = 52 \text{ mm}$ . A figura mostra o esboço dessa câmara.



Para se obter uma boa foto, é necessário que a imagem do objeto seja formada exatamente sobre o filme e o seu tamanho não deve exceder a área sensível do filme. Assim:

- Calcule a posição que o objeto deve ficar em relação à lente.
- Sabendo-se que a altura máxima da imagem não pode exceder a 36,0 mm, determine a altura máxima do objeto para que ele seja fotografado em toda a sua extensão.

## Resolução

a) A partir do enunciado:

$$f = 50 \text{ mm e } p' = 52 \text{ mm}$$

A posição do objeto em relação à lente, dada pela sua abscissa  $p$ , pode ser obtida a partir da equação dos pontos conjugados,  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ .

Assim,

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{p} + \frac{1}{52}$$

$$\therefore p = 1300 \text{ mm} = 1,3 \text{ m}$$

b) A partir do enunciado,  $y'_{\text{max}} = 36,0 \text{ mm}$ . Para se obter a altura máxima do objeto ( $y_{\text{max}}$ ), pode-se utilizar a equação do aumento linear transversal.

$$A = \frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p}$$

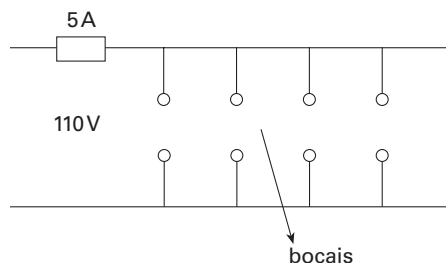
Fazendo-se as substituições numéricas:

$$\frac{36}{y_{\text{max}}} = -\frac{52}{1300} \quad \therefore y_{\text{max}} = -900 \text{ mm}$$

Portanto, a altura máxima do objeto é 900 mm.

## Questão 19

Uma luminária, com vários bocais para conexão de lâmpadas, possui um fusível de 5 A para proteção da rede elétrica alimentada com uma tensão de 110 V, como ilustrado na figura.



Calcule

a) a potência máxima que pode ser dissipada na luminária.

b) o número máximo de lâmpadas de 150 W que podem ser conectadas na luminária.

## Resolução

a) A potência máxima que pode ser dissipada na luminária ocorre quando a intensidade de corrente no fusível é 5 A.

$$P_{\text{máx}} = U \cdot i \longrightarrow P_{\text{máx}} = 110 \cdot 5 \quad \therefore P_{\text{máx}} = 550 \text{ W}$$

b)  $P_{\text{máx}} = N \cdot P_e$ , em que  $N$  é o número de lâmpadas.

$$550 = N \cdot 150 \longrightarrow N = \frac{550}{150} \quad \therefore N = 3,66\dots$$

Portanto o número máximo de lâmpadas que podem ser usadas é  $N = 3$  lâmpadas.

# QUÍMICA

## Questão 20

A Bolívia é um grande produtor de gás natural (metano) e celebrou com o Brasil um acordo para a utilização deste importante recurso energético. Para seu transporte até os centros consumidores, há um gasoduto ligando os dois países, já tendo chegado ao interior do Estado de São Paulo.

- a) Escreva a fórmula mínima e calcule a massa molar para o metano. Dadas as massas molares, em  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ :  
 $C = 12$  e  $H = 1$ .
- b) Escreva a equação para a reação de combustão do metano e o nome dos produtos formados.

## Resolução

a) A fórmula molecular do metano ( $\text{CH}_4$ ) também corresponde à fórmula mínima.

Massa molar do metano =  $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 4(1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

b) Admitindo-se combustão completa, a equação química será:



$\text{CO}_2$  = gás carbônico

$\text{H}_2\text{O}$  = água

Foram considerados os estados físicos mais prováveis a  $25^\circ\text{C}$  e 1 atm.

## Questão 21

Considere os seguintes compostos, todos contendo cloro:



Sabendo que o sódio pertence ao grupo 1, o bário ao grupo 2, o carbono ao grupo 14, o cloro ao grupo 17 da Tabela Periódica e que o hidrogênio tem número atômico igual a 1:

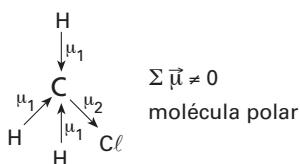
- a) transcreva a fórmula química dos compostos iônicos para o caderno de respostas e identifique-os, fornecendo seus nomes.
- b) apresente a fórmula estrutural para os compostos covalentes e identifique a molécula que apresenta momento dipolar resultante diferente de zero (molécula polar).

## Resolução

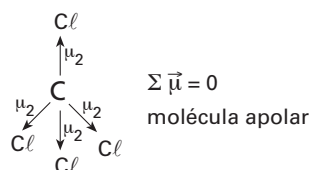
a)  $\text{BaCl}_2$ :  $[\text{Ba}^{2+}][\text{Cl}^-]_2$   
cloreto de bário

$\text{NaCl}$ :  $[\text{Na}^+][\text{Cl}^-]$   
cloreto de sódio

b)  $\text{CH}_3\text{Cl}$ : cloreto de metila  
ou  
monoclorometano



$\text{CCl}_4$ : tetracloreto de carbono



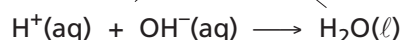
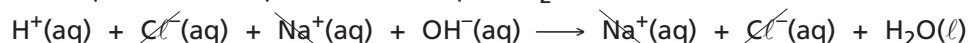
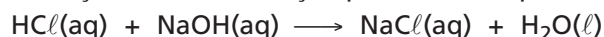
## Questão 22

A soda cáustica (hidróxido de sódio) é um dos produtos utilizados na formulação dos limpa-fornos e desentupidores de pias domésticas, tratando-se de uma base forte. O ácido muriático (ácido clorídrico com concentração de  $12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) é muito utilizado na limpeza de pisos e é um ácido forte. Ambos devem ser manuseados com cautela, pois podem causar queimaduras graves se entrarem em contato com a pele.

- a) Escreva a equação química para a neutralização do hidróxido de sódio com o ácido clorídrico, ambos em solução aquosa.
- b) Dadas as massas molares, em  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ :  $\text{H} = 1$ ;  $\text{O} = 16$  e  $\text{Na} = 23$ , calcule o volume de ácido muriático necessário para a neutralização de 2L de solução de hidróxido de sódio com concentração de  $120 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ . Apresente seus cálculos.

### Resolução

- a) A reação de neutralização poderia ser representada por:



- b) NaOH massa molar =  $40 \text{ g/mol}$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 120 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ V = 2,0 \text{ L} \end{array} \right.$$

Números de mol de NaOH a serem neutralizados:  $6,0 \text{ mol}$

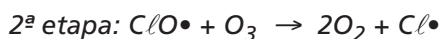
Ácido muriático (HCl  $12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ )

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ mol de HCl} & \xrightarrow{\text{neutraliza}} & 1 \text{ mol de NaOH} \\ x & & 6 \text{ mol de NaOH} \\ x = 6 \text{ mol de HCl} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ L de HCl} & \xrightarrow{\quad} & 12 \text{ mol HCl} \\ x & \xrightarrow{\quad} & 6 \text{ mol HCl} \\ x = 0,5 \text{ L de HCl} & & \end{array}$$

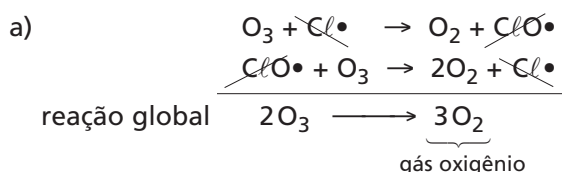
## Questão 23

Há décadas são conhecidos os efeitos dos CFCs, ou freons, na destruição da camada de ozônio da atmosfera terrestre. Acredita-se que a diminuição da quantidade de  $\text{O}_3$  na atmosfera seja responsável pelo aumento na incidência de câncer de pele, pois a radiação ultravioleta não mais é bloqueada com a mesma eficiência. A ação destes gases, como o  $\text{CF}_2\text{Cl}_2$ , inicia-se com a produção de átomos de cloro livres ( $\text{Cl}\bullet$ ), pela interação das moléculas do gás com a radiação solar, seguindo-se as reações:



- a) Escreva a equação global para esta reação e identifique o produto formado.
- b) Considere a afirmação: "O mecanismo proposto para a destruição da camada de ozônio equivale a uma reação catalisada". Justifique esta afirmação e identifique o catalisador.

### Resolução



- b) A espécie  $\text{Cl}\bullet$  atua como catalisador. Esse tipo de reação é uma catálise homogênea: o catalisador ( $\text{Cl}\bullet$ ) participa da reação e, no final, é regenerado.



# COMENTÁRIOS

---

## Matemática

Prova com questões tradicionais, de enunciados claros e precisos.

## Física

Prova adequada à área a que se destina, com questões clássicas apresentando grau de dificuldade médio. Sentimos falta de eletromagnetismo.

## Química

Foi uma prova fácil, em que se abordaram tópicos importantes do programa. Contudo, com o pequeno número de questões, não pôde ser abrangente.